Final Bachillerato 2017

Problema 1. Sea n un entero positivo. Si se tiene que $n^n = 2017^{2017^{2018}}$ ¿Cuántos divisores positivos tiene n?

Nota: El número 2017 es primo.

Solución. Nótese que

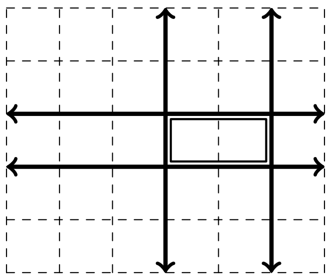
$$2017^{2017^{2018}} = 2017^{2017 \cdot 2017^{2017}} = \left(2017^{2017}\right)^{2017^{2017}} = n^n$$

implicando que $n = 2017^{2017}$. Debido a que 2017 es primo, n tiene 2018 divisores.

Problema 2. Determina la cantidad de rectángulos distintos que puedes encontrar en una cuadrícula de $p \times q$.

Nota: Recuerde que todo cuadrado es también un rectángulo.

Solución. Una cuadrícula de $p \times q$ tiene $p+1$ líneas horizontales y $q+1$ líneas verticales. La siguiente cuadrícula de 5×6 tiene 6 líneas horizontales y 7 líneas verticales.



Para elegir un rectángulo, solo debemos elegir dos líneas horizontales y dos líneas verticales, y es fácil ver que todo rectángulo queda definido de manera única con este método. Esto significa que hemos reducido el problema a contar de cuántas maneras se puede elegir 2 líneas horizontales de un total de $p+1$, y dos verticales de un total de $q+1$. Por el principio multiplicativo, ambos valores se deben multiplicar, por lo que la respuesta es

$$\binom{p+1}{2} \cdot \binom{q+1}{2} = \frac{p \cdot q \cdot (p+1) \cdot (q+1)}{4}.$$

Problema 3. La *Sucesión de Fibonacci* es la lista de números que empieza 1, 2, 3, 5, 8, 13 y continúa con cada número siendo la suma de los dos anteriores.
Demuestra que cuando los primeros n elementos de la sucesión de Fibonacci son sumados y restados alternadamente, el valor absoluto del resultado es un elemento de la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo

$$1 - 2 + 3 - 5 = -3$$

y 3 es un elemento de la sucesión de Fibonacci.

Demostración. Sea $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$.

$$F_2 - F_3 + F_4 - \cdots \pm F_{n-1} = (F_2) - (F_1 + F_2) + (F_2 + F_3) - \cdots \pm (F_{n-3} + F_{n-2})$$

Como $F_2 = F_1$ notamos que en el lado derecho de la igualdad, cada par de términos consecutivos se cancelan a excepción del último término F_{n-2}. Entonces

$$F_2 - F_3 + F_4 - \cdots \pm F_{n-1} = \pm F_{n-2}. \qquad \blacksquare$$

Problema 4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con $\angle ABC = \angle BCD$, $AB = 6$ y $CD = 8$. Se sabe que existe un punto P en el lado BC tal que $\angle BAP = \angle PAD$ y $\angle PDA = \angle PDC$. Halla BC.

Solución. Sea $\angle BAP = \alpha$ y $\angle PDA = \angle PDC = \beta$. Sumando los ángulos interiores del cuadrilátero $ABCD$ obtenemos:

$$\angle ABC + \angle BCD + 2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$

, luego:

$$\angle ABC = \angle BCD = 180^\circ - \alpha - \beta,$$

de donde concluimos que $\angle APB = \beta$, $\angle CPD = \alpha$ y $\angle APD = 180^\circ - \alpha - \beta$. Luego, los triángulos ABP, PCD y APD son directamente semejantes. Sea $AD = k$, entonces

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{AD}$$

de donde

$$AP = \sqrt{AB \times AD} = \sqrt{6k}.$$

Similarmente obtenemos que $PD = \sqrt{8k}$.
Por otro lado, tenemos que:

$$\frac{BP}{BA} = \frac{PD}{PA} = \frac{\sqrt{8k}}{\sqrt{6k}}$$
$$\frac{BP}{6} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$$
$$BP = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Ademas,

$$\frac{PC}{CD} = \frac{AP}{PD} = \frac{\sqrt{6k}}{\sqrt{8k}}$$
$$\frac{PC}{8} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}$$
$$PC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Finalmente, $BC = BP + PC = 8\sqrt{3}$.

Problema 5. Encuentra todos los cubos perfectos positivos no divisibles para 10 tal que el número obtenido tras borrar los últimos tres dígitos también es un cubo perfecto positivo.

Solución. Sea y^3 el cubo perfecto que buscamos ($y \in \mathbb{Z}^+$). Entonces será de la forma $y^3 = (10x)^3 + a$ donde $a \in \{1, 2, \ldots, 999\}$, $x \in \mathbb{Z}^+$, donde x^3 es el número que resulta tras borrar los tres últimos dígitos de y^3, por eso no puede pasar que $x = 0$. Además, el siguiente cubo perfecto después de $(10x)^3$ es $(10x+1)^3$ y como $y^3 > (10x)^3$, entonces $y^3 \geq (10x+1)^3$.

$$\begin{aligned}
1000 > a = y^3 - (10x)^3 &\geq (10x+1)^3 - (10x)^3 \\
1000 &> 1000x^3 + 300x^2 + 30x + 1 - 1000x^3 \\
0 &> 300x^2 + 30x - 999 \\
0 &> 100x^2 + 10x - 333 = p(x)
\end{aligned}$$

El hecho que $p(x)$ sea una función cuadrática convexa (cóncava hacia arriba) con minímo en $x = -\frac{10}{2\cdot 100} = -\frac{1}{20}$ quiere decir que para todo $x > -\frac{1}{20}$ la función es estrictamente creciente. Se tiene que $p(1) = -223$, $p(2) = 87$ y $p(x) > 0$ para todo $x \geq 2$. Entonces $x = 1$ es el único entero positivo que satisface $p(x) < 0$ implica $1000 + a = y^3$. Se sigue que $1001 \leq y^3 \leq 1999$. Por lo tanto $y^3 \in \{1331, 1738\}$.

Problema 6. En cada casilla de un tablero de 9×9 se debe escribir 0 o 1. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto si en cada subtablero de 2×2, en cada subtablero de 1×4, y en cada subtablero de 4×1 la suma de los cuatro números siempre es par?

Solución. Supongamos que el tablero ya está completo, es decir, tiene un 0 o un 1 en cada una de sus casillas.
El tablero de 9×9 tiene 9 filas y 9 columnas, Diremos que dos filas son *idénticas* si coinciden en sus 9 posiciones y diremos que son *opuestas* si difieren en sus 9 posiciones, Por ejemplo, las siguientes dos filas son opuestas

0	0	1	0	0	0	1	1	0

1	1	0	1	1	1	0	0	1

Diremos que una distribución de 0s y 1s es *regular por filas* si se cumple que dos filas cualesquiera son idénticas u opuestas. De forma análoga, decimos que una distribución es *regular por columnas* si se cumple que dos columnas cualesquiera son idénticas u apuestas. Es fácil notar que una distribución es regular por filas si y sólo si es regular por columnas, así que a paritr de ahora podemos decir que una distribución es regular debido al siguiente resultado (ya sabemos que son equivalentes).

Hemos definido una distribución regular debido al siguiente resultado (que es fácil de demostrar):
"Una distribucion de 0s y 1s es regular si y sólo si cumple que la suma de los números de cada subtablero de 2×2 es par".
Regresemos a nuestro problema, Vamos a demostrar que el número de formas en que se puede escribir los 0s y 1s es $32 = 2^5$. Para eso consideremos las casillas a, b, c, d, e:

a	b	c						
d								
e								

Demostraremos que para cada forma de escoger los números de estas cinco casillas hay exactamente una forma de completar todo el tablero de tal forma que se cumplan todas las condiciones requeridas. Como hay $32 = 2^5$ formas de escoger los números de estas casillas, esta será la respuesta.
Si conocemos los valores de a, b, c, d, e usando la condicion de que la suma de los números de cada subtablero de 1×4 es par, podemos determinar de forma única todos los números de la primera fila (arriba).
De forma similar, usando la condición de que la suma de todos los números de cada subtablero de 4×1 es par, podemos determinar de forma única todos los números de la primera columna (izquierda).
Ahora, como queremos que la suma de los números de cada subtablero de 2×2 sea par, entonces la distribución tiene que ser regular. Hasta ahora ya tenemos la primera fila, guiándonos de la primera columna podemos conseguir de forma única una distribución regular por filas y ya sabemos que esta distribución será regular.
Falta demostrar que esta distribución conseguida cumple que la suma de los nùmeros de cada subtablero de 1×4 o de 4×1 es par. En efecto, ya sabemos que cualquier subtablero de 1×4 incluido en la primera fila cumple que la suma es par, como dos filas cualesquiera son idénticas u opuestas, esta misma propiedad se va a cumplir para cualquier subtablero de 1×4 incluido en la primera fila. De forma análoga se demuestra para los subtableros de 4×1.
Por lo tanto, la (única) distribución conseguida cumple las condiciones requeridas en el enunciado. Luego, el número total de formas es 32.